Serie 6

1. Zusammenkleben von stetigen Abbildungen

Es seien $(E,\mathcal{T})$, $(E',\mathcal{T}')$ topologische Räume. *Notation*: Für $Y \subset E$ schreiben wir $f \in C(Y,E')$ wenn $f:(Y,\mathcal{T}_Y) \to (E',\mathcal{T}')$ stetig ist. Zeige:

a) Angenommen $E = A \cup B$ ist die Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen A, B von $(E,\mathcal{T})$. Wenn $f \in C(A,E')$ und $g \in C(B,E')$, und wenn $f = g$ auf $A \cap B$, dann ist $h : E \to E'$, definiert durch $h|A = f$ und $h|B = g$, stetig.

b) Wenn $A \subset E$ abgeschlossen ist und $f \in C(A,E')$ auf ∂A einer Konstanten c gleicht, dann ist die *triviale Fortsetzung* F von f auf E, definiert durch $F|A = f$ und $F = c$ auf A^c, stetig.

c) Sei $s_0 \in (0,1)$. Wenn $f : [0,s_0] \times E \to E'$ und $g : [s_0,1] \times E \to E'$ stetige Abbildungen sind welche auf $\{s_0\} \times E$ übereinstimmen, dann ist $h : [0,1] \times E \to E'$, definiert durch $h|_{[0,s_0]\times E} := f$ und $h|_{[s_0,1]\times E} := g$, stetig.

2. 2-te Homotopiegruppe (Würfel-Klebe Version)

Sei (E,b) ein beliebiger punktierter topologischer Raum. Wir schreiben $R := \partial([0,1]^2) = [0,1]^2 \setminus (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ für den Rand des Einheitsquadrats. Gegeben zwei stetige Abbildungen $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1]^2 \to E$ mit $\gamma_0(R) = \gamma_1(R) = \{b\}$, so

1. sagen wir dass γ_0, γ_1 zueinander *homotop* sind, und schreiben $\gamma_0 \sim \gamma_1$, wenn es eine stetige Abbildung $\Gamma : [0,1] \times [0,1]^2 \to E$ gibt so dass

$$\Gamma(0,\cdot) = \gamma_0,\ \Gamma(1,\cdot) = \gamma_1,\ \text{und } \forall s \in [0,1] : \Gamma(\{s\} \times R) = \{b\}.$$

   Wir nennen Γ eine *Homotopie* von γ_0 nach γ_1.

2. definieren wir die Verkettung $\gamma_0 \cdot \gamma_1 : [0,1]^2 \to E$ durch

$$\gamma_0 \cdot \gamma_1(x,y) := \begin{cases} \gamma_0(x,2y) & \text{falls } y \in [0,\frac{1}{2}], \\ \gamma_1(x,2y-1) & \text{falls } y \in (\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $\pi_2(E,b)$ die Menge der Homotopieklassen $[\gamma]$ von stetigen Abbildungen $\gamma : [0,1]^2 \longrightarrow E$ mit $\gamma(R) = \{b\}$ versehen mit der Verknüpfung

$$\cdot : \pi_2(E,b) \times \pi_2(E,b) \to \pi_2(E,b),\ ([\gamma_0],[\gamma_1]) \mapsto [\gamma_0 \cdot \gamma_1]. \tag{1}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es zu prüfen, dass $\pi_2(E,b)$ eine kommutative Gruppe ist.

a) Prüfen Sie, dass $\gamma_0 \cdot \gamma_1$ wiederum eine stetige Abbildung mit $\gamma_0 \cdot \gamma_1(R) = \{b\}$ ist. Zeigen Sie, dass falls $\gamma_0 \sim \gamma_0'$ und $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ gilt, so gilt auch $\gamma_0 \cdot \gamma_1 \sim \gamma_0' \cdot \gamma_1'$.

b) Zeigen Sie, dass die in (1) definierte Abbildung $\cdot$ assoziativ ist.

c) Zeigen Sie, dass $[e]$ mit $e(x,y) = b$ für alle $(x,y) \in [0,1]^2$ das neutrale Element der Gruppe $\pi_2(E,b)$ ist.

d) Zeigen Sie, dass für jedes $[\gamma] \in \pi_2(E,b)$ ein inverses Element existiert.

e) Zeigen Sie, dass für stetige Abbildungen $\gamma, \gamma' : [0,1]^2 \to E$ mit $\gamma(R) = \{b\} = \gamma'(R)$ gilt
$$\gamma \cdot \gamma' \sim \gamma' \cdot \gamma.$$

3. 2-te Homotopiegruppe vom Kreis

In dieser Aufgabe wollen wir beweisen, dass $\pi_2(S^1)$ trivial ist. Sei also
$$\gamma_0 : [0,1]^2 \to S^1$$
stetig mit $\gamma_0(R) = \{1\}$, wobei $R = \partial([0,1]^2)$, wie in Aufgabe 2. Sei weiter
$$\gamma_1 \colon [0,1]^2 \to S^1$$
die konstante Abbildung mit $\gamma_1([0,1]^2) = \{1\}$.

a) Sei π die Abbildung
$$\pi : \mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto \exp(2\pi i t).$$
Zeigen Sie, dass es eine eindeutige stetige Abbildung $\widetilde{\gamma}_0 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{\gamma}_0(R) = \{0\}$ gibt so, dass $\pi \circ \widetilde{\gamma}_0 = \gamma_0$.

b) Analog existiert eine eindeutige stetige Funktion $\widetilde{\gamma}_1 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{\gamma}_1(R) = \{0\}$ und $\pi \circ \widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1$. Wie sieht $\widetilde{\gamma}_1$ aus? Geben Sie eine Homotopie $\widetilde{\Gamma}$ von $\widetilde{\gamma}_0$ nach $\widetilde{\gamma}_1$ an.

c) Geben Sie eine Homotopie Γ von γ_0 nach γ_1 an.

4. Hopf-Faserung

Wir betrachten S^3 als den Raum der Paare (z, z') von komplexen Zahlen mit $|z|^2 + |z'|^2 = 1$ und S^2 als den Raum der Paare $(z_0, x_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mit $|z_0|^2 + (x_0)^2 = 1$. Dann ist die Hopf-Faserung $F\colon S^3 \longrightarrow S^2$ gegeben durch

$$F(z, z') = (2z\overline{z'}, |z|^2 - |z'|^2).$$

a) Zeigen Sie, dass F wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie, dass das Urbild von jedem Punkt in S^2 unter F ein Kreis ist.